به نام خدا

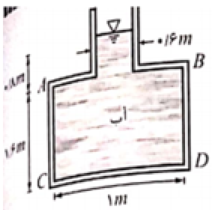
مکانیک سیالات

طاهره کاظمی

نیروی هیدرواستاتیک

نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطوح تخت افقی

$$F = \int P\, dA \longrightarrow F = PA$$



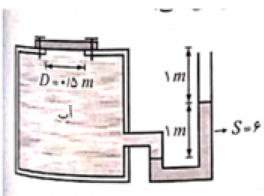
مثال۱: مقطع ظرفی که در شکل نشان داده شده است، دایره ای می باشد. مقدار نیروی قائم رو به بالا، وارده به سطح AB و نیز مقدار نیروی قائم رو به پایین، وارده به سطح CD را تعیین کنید. آیا نیروی وارد بر سطح CD با وزن سیال درون ظرف برابر است؟ چرا؟ $(\pi=3)$

$$P_{AB} = 0.8 \times 10 = 8\ kpa$$

$$PAB = \frac{FAB}{A} \longrightarrow F_{AB} = P_{AB} \times A = 8\left(\frac{\pi}{4}\ (1^2 - 0.6^2)\right) = 3.84\ N$$

$$P_{CD} = \gamma\, h = 10 \times (1.6+0.8) = 24\ kpa$$

$$F_{CD} = PA = 24\left(\pi \times \frac{1^2}{4}\right) = 18\ KN$$



مثال۲: در شکل مقابل یک درپوش دایره ای به جرم ۱۵۰kg توسط دو پیچ فلزی بر روی ظرف استوانه ای محکم شده است. نیروی کششی ایجادشده در هریک از پیچ ها چند نیوتن است؟ $(g = 10 m/s2 \quad , \pi=3)$

$$P + 10000(2) - 6\,(10000)\,(1) = 0 \longrightarrow P = 40000\ pa$$

$$F = P.A = 40000\left(\pi \times \frac{0.5^2}{4}\right) = 7500\ N$$ نیروی هیدرواستاتیک وارد بر پیچ

$$Fn = F - w = 7500 - 150 \times 10 = 6000$$ نیروی تامین شده توسط پیچ

$$Ft = \frac{Fn}{2} = \frac{6000}{2} = 3000\ N$$ نیروی کششی هر پیچ

نیروی وارد بر سطوح تخت مایل و قائم

روش انتگرال گیری :

$$F=\int P\, dA$$

گشتاور نیروهای وارد بر صفحه:

$$Mx=y\,F=\int yP\, dA$$

$$My=x\,F=\int xP\, dA$$

مرکز فشار:

$$Xp=\frac{My}{F}=\frac{1}{F}\int xP\, dA$$

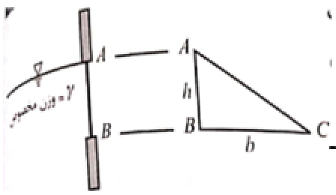
$$Yp=\frac{Mx}{F}=\frac{1}{F}\int yP\, dA$$

مثال ۳ : در شکل مقابل مثلث قائم الزاویه ABCبه صورت قائم قرار دارد، به طوریکه راس آن بر سطح آزاد مایع منطبق است.

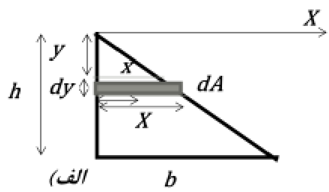
مطلوب است تعیین :

الف) نیروی وارد از طرف مایع بر یک طرف سطح

ب) گشتاور نیروی وارد از طرف مایع بر یک طرف سطح حول محور AB



$$\begin{cases} dA=X\,dy \\ \dfrac{X}{y}=\dfrac{b}{h} \end{cases} \longrightarrow dA=\frac{yb}{h}\,dy$$



الف)

$$F=\int P\, dA=\int_0^h(\gamma\, y)\left(\frac{yb}{h}\, dy\right)=\frac{\gamma b}{h}\int_0^h y^2\, dy=\frac{\gamma b}{h}\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^h=\frac{1}{3}\,\gamma\, b\, h^2$$

ب)

$$MAB=My=\int_A x\, PdA=\int_0^h\left(\frac{X}{2}\right)(\gamma\, y)\left(\frac{\gamma b}{h}\, dy\right)=\int_0^h\frac{yb}{2h}\,(\gamma y)(\frac{yb}{h}dy)$$

$$MAB=My=\frac{\gamma b^2}{2h^2}\int_0^h y^3 dy=\left[\frac{\gamma b^2}{2h^2}\left(\frac{y^4}{4}\right)\right]\Big|_0^h=\frac{1}{8}\,\gamma\, b^2 h^2$$

نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطوح تخت افقی

استفاده از فرمول :

$$\left.\begin{aligned} F &= \gamma \sin\theta \int_A y\, dA \\ \bar{y} &= \frac{\int_A y\, dA}{A} \end{aligned}\right\} F = \gamma \bar{y} A \sin\theta \quad , \quad \bar{h} = \bar{y}\sin\theta \longrightarrow F = \gamma \bar{h} A = P_G A$$

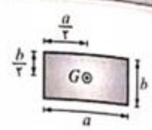
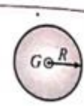
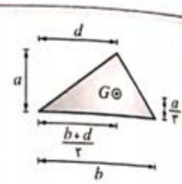
مرکز فشار :

$$Xp = \bar{X} + \frac{\overline{Ixy}}{A\bar{y}}$$

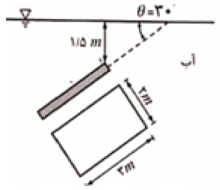
$$yp = \bar{y} + \frac{IG}{\bar{y}A}$$

نکته : اگر سطح نسبت به یکی از نمودار های $X = \bar{X}$ یا $y = \bar{y}$ متقارن باشد در آن صورت :

$$Ixy = 0 \quad , \quad Xp = \bar{X} \quad , \quad yp = \bar{y}$$

I_G	$\bar{I}_{xy}$	A	مشخصات مقطع / شکل مقطع
$\frac{۱}{۱۲}ab^{۳}$	۰	ab	
$\frac{۱}{۴}\pi R^{۴}$	۰	$\pi R^{۲}$	
$\frac{۱}{۳۶}ba^{۳}$	$\frac{۱}{۷۲}ba^{۲}(b-۲d)$	$\frac{۱}{۲}ab$	
$۰/۱۰۹۸ R^{۴}$	۰	$\frac{۱}{۲}\pi R^{۲}$	

مثال۴ : با توجه به شمل روبرو نیروی وارد بر سطح مستطیلی که از طرف آب بر آن اعمال می شود، چند نیوتن است؟

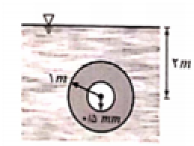


$$\bar{h} = 1.5 + \frac{3}{2} \times \sin 30 = 2.25\ m$$

$$F = \gamma\, \bar{h}\, A = 10 \times 2.25 \times 6 = 135\ kN$$

مثال۵ : در شکل مقابل نیروی وارده از طرف آب به طرف حلقه قائم را محاسبه کنید.

$$F = \gamma\, \bar{h}\, A = 10 \times 2 \times \left[\pi \times \left(1^2 - 0.5^2\right)\right] = 15\,\pi\ kN$$



نکته : اگر به جای $\bar{y}$ داشته باشیم$\bar{h}$:

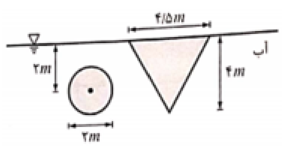
$$yp = \bar{y} + \frac{IG\sin^2\theta}{\bar{h}A}$$

در صفحات تخت قائم :

$$\theta = 90 \longrightarrow \sin 90 = 1 \longrightarrow hp = \bar{h} + \frac{IG}{\bar{h}A}$$

مثال۶ : برای سطوح قائم نشان داده شده در شکل، نیروی وارد بر یک طرف سطح از طرف آب و نیز فاصله مرکز فشار تا سطح آزاد مایع را محاسبه کنید. ($\pi = 3 \quad , \quad \gamma = 10\,kN/m3$)

الف) سطح دایره ای شکل :



$$F = \gamma\, \bar{h}\, A = 10 \times 2 \times \left(\frac{\pi \times 2^2}{4}\right) = 60\ kN$$

$$h\,p = \bar{h} + \frac{IG}{A\bar{h}} = 2 + \frac{\left(\frac{\pi \times 2^4}{64}\right)}{\left(\frac{\pi \times 2^2}{4}\right) \times 2} = 2.125\,m$$

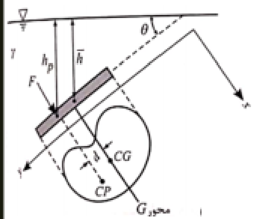
ب) سطح مثلثی :

$$\bar{h} = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$F = \gamma\, \bar{h}\, A = 10 \times \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4.5\right) = 120\ kN$$

$$h\,p = \bar{h} + \frac{IG}{A\bar{h}} = \frac{4}{3} + \frac{\frac{1}{36} \times 4.5 \times 4^3}{9 \times \frac{4}{3}} = 2\ m$$

نکته :



برای یک طرف سطح تختی که به طور کامل در مایعی به وزن مخصوصγ فرورفته است، لنگر نیروی هیدرواستاتیک حول محور افقی گذرنده از مرکز سطح (محورG یا همان محور$X=\overline{X}$) به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$M = F \times d = F \times (yp - \bar{y})$$

$$F = \gamma \bar{h} A \quad \Longrightarrow \quad M=\gamma \bar{h} A \left(\frac{IG\sin\theta}{A\bar{h}}\right)$$

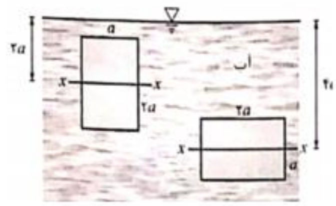
$$yp=\bar{y}+\frac{IG\sin^2\theta}{\bar{h}A}$$

$$\boxed{M=\gamma\, I_G \sin\theta}$$

مثال۷ : مطابق شکل مقابل، یک سطح مستطیلی قائم را در دو وضعیت، درون آب قرار می دهیم. لنگر نیروی هیدرواستاتیک وارد بر یک طرف سطح حول محور تقارن ، در حالت (۲) چندبرابر حالت (۱) است ؟

حالت ۱:

حالت ۲ :



$$Ig1=\frac{1}{12}\ 2a\ (a)^3=\frac{a^4}{6}$$

$$Ig2=\frac{1}{12}\ a\ (2a)^3=\frac{2a^4}{3}$$

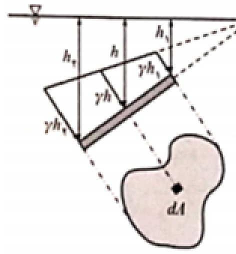
$$M=\gamma\, I_G \sin\theta \longrightarrow \frac{M2}{M1}=\frac{\gamma\, I_G 2\sin\theta}{\gamma\, I_G 1\sin\theta}=\frac{IG2}{IG1}=\frac{12}{3}=4$$

روش منشور فشار :

منشور : حجمی است به شکل منشور که قائده آن همان صفحه مسطح است و ارتفاع آن از قاعده، در هر نقطه برابر γh می باشد.

نیروی برآیند وارد بر یک طرف صفحه برابر است با حجم منشور فشار

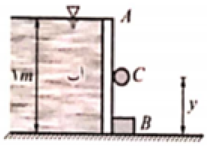
مختصات مرکز فشار هم همان مختصات مرکز حجم منظور است.



(۱۵-۱)

$$XP = \frac{1}{V} \int X \, dV$$

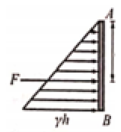
$$yp = \frac{1}{V} \int y \, dV$$



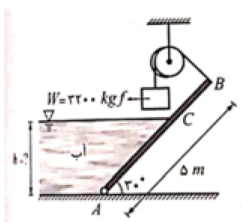
مثال۸ : در شکل مقابل Y را طوری تعیین کنید که وقتی سطح آب به بالای دیواره مستطیلی می رسد، دیواره حول C دوران کند.

$$hp = \frac{2h}{3} = \frac{2}{3} = 0.666\ m$$

$$BC = y = 1 - hp = 1 - 0.666 = 0.333\ m$$



اگر مانع C بالای مرکز فشار باشد لنگر نیروی هیدرواستاتیک در جهت عقربه های ساعت بوده و با برخورد دیوار به مانع B هیچ گونه حرکتی در دیواره نخواهیم داشت. با حرکت C به سمت پایین و قرار دادن آن در مرکز فشار، دیواره در آستانه دوران حول C قرار می گیرد.



مثال ۹ : در شکل مقابل ارتفاع h چقدر باشد تا دریچه به حالت تعادل قرار داشته باشد؟

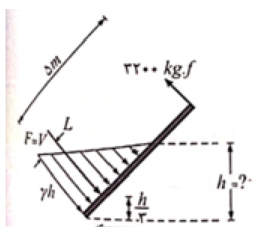
از نیروی اصطکاک و وزن دریچه صرف نظر کنید و عرض دریچه را برابر ۳ متر در نظر بگیرید.

$(\gamma w = 1000 kg.f/m3)$

$$F = \left[\frac{\gamma\, h \left(\frac{h}{sin30}\right)}{2} \right] (3) = 3\,\gamma\, h^2 = 3000h^2\ kg.f$$

$$L = \frac{\frac{h}{3}}{sin30} = \frac{h}{3sin30} = \frac{2}{3}\ h$$

$$\sum MA = 0 \longrightarrow 3200 \times 5 - \left(3000h^2\right) \times \left(\frac{2}{3} h\right) = 0 \longrightarrow h = 2\,m$$



مقایسه روش های محاسبه نیروی هیدرواستاتیک در سطوح تخت:

۱- اگر سطح مورد نظر در یک مایع تراکم پذیر با γ متغیر داشته باشد: روش انتگرال گیری

۲ - اگر سطح مورد نظر در یک مایع تراکم ناپذیر با γ ثابت داشته باشد : روش فرمول

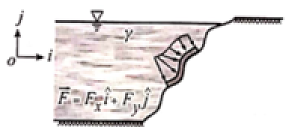
۳ - اگر یک سطح تخت مستطیلی داشته باشیم با γ ثابت و لنگر نیروی هیدرواستاتیک نیاز باشد : روش منشور فشار

نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطوح منحنی:

سطوح منحنی به علت انحنا ⟵ متغیر بودن جهت جزء نیروهای عمودی فشار ⟵ نمی‌توان از انتگرال استفاده کرد

↓

تجزیه کردن نیروها در جهت X و Y

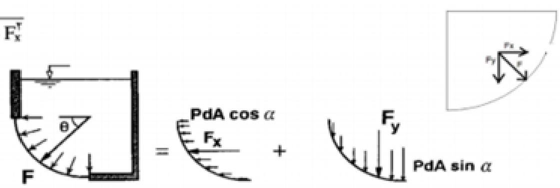


مولفه افقی نیروی وارد بر یک سطح منحنی برابر است با نیروی وارد بر تصویر قائم آن سطح.

مولفه قائم نیروی وارد بر یک سطح منحنی برابر است با وزن مایعی که به صورت قائم تا سطح آزاد، بر روی سطح منحنی قرار دارد. (وزن مایع فرضی یا واقعی)

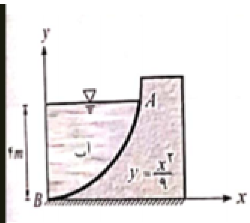
نکته: نقطه اثر نیروی افقی، از مرکز فشار تصویر قائم سطح می‌گذرد و امتداد نیروی قائم نیز از مرکز حجم ستون مایع عبور خواهد کرد.

$$\begin{cases} F = \sqrt{F_y^2 + F_x^2} \\ \tan\theta = \dfrac{F_y}{F_x} \end{cases}$$



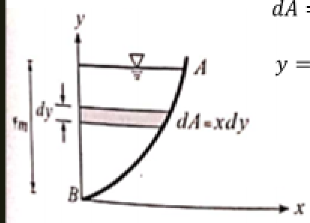
α = زاویه جزء نیروهای عمودی فشار با راستای افقی

مثال ۱۰: در شکل مقابل سطح AB یک منحنی سهمی شکل به معادله $y = \frac{x^2}{9}$ و عرض واحد است. مقدار نیروی هیدرواستاتیک وارد به این سطح را به دست آورید.



$$Fx = FH = \gamma \bar{h} A = 10 \times 2 \times 4 \times 1 = 80\ KN$$

برای محاسبه مولفه قائم نیروی هیدرواستاتیک، با انتخاب المان سطح مطابق شکل زیر، خواهیم داشت:



$$\left.\begin{array}{l} dA = xdy \\ y = \frac{x^2}{9} \longrightarrow x = 3\sqrt{y} \end{array}\right\} \quad dA = 3\sqrt{y}dy$$

$$V = \int dv = \int 1 \times dA = \int 3\sqrt{y}dy$$

$$Fy = FV = \gamma V$$

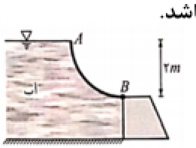
$$\Longrightarrow \quad Fy = FV = \gamma V = \gamma \int dV = 10 \int_0^4 3\sqrt{y}dy = 10 \times 2y^{\frac{3}{2}}]_0^4 = 160kN$$

$$\Longrightarrow \quad F = \sqrt{80^2 + 160^2} = 80\sqrt{5}\ \ KN$$

نکته: هنگام محاسبه مولفه نیروی قائم هیدرواستاتیک، چنانچه مایع (با وزن مخصوص γ) در زیر سطح منحنی قرار داشته باشد، می‌توانیم با معلوم بودن فشار (P) در یک نقطه از این سطح آزاد مجازی به فاصله $\frac{P}{\gamma}$ از نقطه مورد نظر ترسیم کنیم. در این حالت با محاسبه وزن مایع مجازی قرارگرفته در بالای سطح منحنی، مولفه قائم نیروی هیدرواستاتیک به دست می آید. در بکارگیری مایع مجازی دو مورد زیر را به خاطر بسپارید:

الف- فشار در دو طرف هر نقطه واقع بر سطح منحنی بایستی یکسان باشد. برای این منظور مایع مجازی حتما باید از جنس مایع حقیقی (با همان γ) قرار داده شود.

ب- جهت نیروی وارده در حالت مایع مجازی خلاف جهت نیروی وزن مایع مجازی بوده و به طرف بالا می‌باشد.



مثال ۱۱: دریچه AB به شکل ربع دایره و عرض واحد، در شکل مقابل نشان داده شده است. مقدار نیروی کل وارده از جانب آب بر آن چقدر است؟

$$Fx = FH = \gamma \bar{h} A = 10 \times 1 \times 2 \times 1 = 20\ KN$$

چون آب زیر دریچهAB قرار گرفته است، پس برای محاسبه مولفه قائم نیروی هیدرواستاتیک از روش مایع مجازی استفاده می‌کنیم:

$$Fy = Fv = \gamma V = 10 \times \left(\frac{1}{4}\pi \times 2^2 \times 1\right) = 30\ KN$$

$$F = \sqrt{20^2 + 30^2} = 10\sqrt{13}\ KN$$

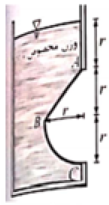
نکته : هنگامی که منحنی از زیر و رو تحت فشار مایع می‌باشد، بهتر است برای تعیین حجم مایعی که وزن آن (حقیقی و مجازی) ملاک محاسبه نیروی عمودی است، از روش زیر استفاده شود:

مرحله ۱- سطح مورد نظر را مشخص می‌کنیم و از ابتدا به سمت انتهای آن حرکت می‌کنیم.

مرحله ۲- در صورت نیاز با حرکت عمودی خود را از نقطه انتها به سطح آزاد می رسانیم و سپس در صورت نیاز با حرکت افقی در بالای نقطه ابتدا قرار می‌گیریم.

گام سوم- با حرکت عمودی از سطح آزاد خود را به نقطه ابتدا می‌رسانیم.

گام چهارم- حجم محصور شده بین مسیرهای طی شده، حجم مورد نظر برای محاسبه نیروی قائم است. اگر به طور واقعی در داخل این حجم مایعی وجود داشته باشد، جهت نیرو به سمت پایین و در غیر این صورت جهت نیرو به سمت بالا خواهد بود.

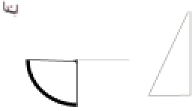


مثال۱۲: در شکل مقابل، مولفه قائم نیروی وارد برسطح ABC را تعیین کنید. عرض سطح ABC ، 2 m است.

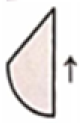
مرحله ۱

مرحله ۲

مرحله ۳

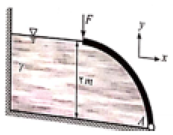


مرحله ۴

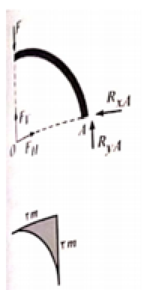


$$Fy = Fv = Fv1 + Fv2 = \gamma(v1 + v2) = \gamma\left(\frac{1}{4}\times\pi\times r^2\times 2 + \frac{1}{2}\times r^2\times 2\right) = \gamma r^2\left(\frac{\pi}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\gamma r^2$$

نکته: اگر سطح منحنی قسمتی از محیط یک دایره باشد، چون جزء نیروهای عمودی فشار در امتداد شعاعی بوده و از مرکز دایره خواهند گذشت، بنابراین برآیند آنها نیز از مرکز دایره عبور می‌کند. در این حالت در حل مسائل مربوطه، نیروی هیدرواستاتیک را به صورت تجزیه شده (مولفه های FH و Fv) به مرکز دایره منتقل می‌کنیم.



مثال ۱۳: در شکل مقابل دریچه ربع دایره‌ای به شعاع2 m و عرض واحد، آزادانه حول مفصل A دوران می‌کند. مقدار نیروی F چقدر باشد تا دوران دریچه مهار گردد؟ ($\gamma = 8\ kN$, $\pi = 3$)



با انتقال نیروهای FH وFv به مرکز دایره داریم:

$$\sum MA = 0 \longrightarrow Fv\times R = F\times R \longrightarrow F=Fv$$

برای محاسبه Fv ، با استفاده از مایع مجازی داریم:

$$Fv = \gamma v = 8\left(2^2\times 1 - \frac{1}{4}\pi\times 2^2\right) = 8\ KN$$

$$F = Fv = 8\ KN$$

نیروی شناوری:

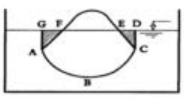
فرض کنید جسم جامدی را درون ظرفی که محتوی یک سیال ساکن است، قرار داده‌ایم. این جسم ممکن است در سیال مورد نظر، **شناور** یا **غوطه‌ور** شود و یا با حرکت به سمت کف ظرف، در آن **ته‌نشین** گردد. اما اینکه تحت چه شرایطی وقوع هر یک از حالات فوق محقق می‌شود، خود مستلزم شناسایی و بررسی نیروهای وارد بر جسم در حالات مذکور است.

حالت شناوری: چنانچه قسمتی از جسم جامد درون مایع غوطه‌ور باشد و مابقی خارج آن قرار گیرد، گوییم در مایع شناور است. نیروهای وارد بر جسم جامد در حالت شناوری عبارتست از:

الف) نیروی وزن که در راستای قائم و رو به پایین بر مرکز ثقل جسم شناور وارد می‌شود. $W = (\Upsilon_s)(V)$

ب) نیروی هیدرواستاتیک، که خود دارای دو مولفه افقی و یک قائم است. مولفه‌های افقی نیروی هیدرواستاتیک به علت صفر بودن تصویر بخش غوطه‌ور جسم شناور روی صفحه قائم، برابر صفر می‌باشند و مولفه قائم آن به صورت زیر قابل محاسبه است:

V_{EFABC} حجم مایع جابجا شده توسط جسم شناور می‌باشد. حال اگر حجم مذکور را با V_d نشان دهیم و F_v را با F_B جایگزین کنیم، در آن صورت خواهیم داشت:

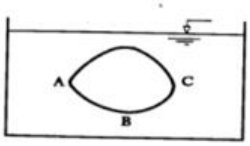


$$Fv = \gamma f \times (VGABCD) - \gamma f(VGAF + VDCE) = \gamma f \times VEFABC$$

$$FB = \gamma f \times Vd = Wd$$

نیروی هیدرواستاتیک را در حالتی که بر یک سطح بسته یا همان جسم جامد وارد می‌شود، نیروی شناوری (F_B) می‌نامند که طبق رابطه فوق برابر است با وزن مایع جابجا شده توسط جسم شناور.

حالت غوطه‌وری: در این حالت تمام جسم جامد درون مایع قرار می‌گیرد و نیروی شناوری، بیشترین مقدار خود را دارد.

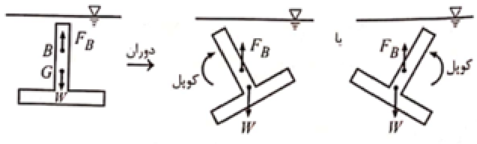


$$\sum \boldsymbol{Fy = 0} \longrightarrow \boldsymbol{W = FB} \longrightarrow \boldsymbol{\gamma s\,.V = \gamma s\,.Vd = \gamma f\,.V} \longrightarrow \boldsymbol{\gamma s = \gamma f}$$

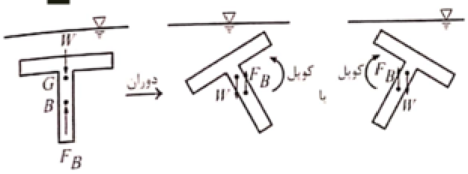
حالت ته‌نشینی: در این حالت جسم جامد پس از قرارگیری در سیال به‌طرف کف ظرف حرکت می‌کند تا سرانجام با ته‌نشینی در آن به تعادل برسد.

$$W > FB \longrightarrow \gamma s\, V > \gamma s\, V \longrightarrow \gamma s > \gamma f$$

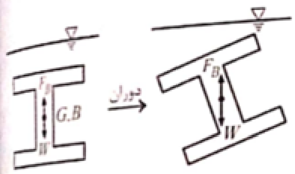
پایداری اجسام غوطه ور



۱- تعادل پایدار : اگر مرکز ثقل جسم غوطه‌ور زیر مرکز شناوری باشد.
در این حالت اگر تغییر شکل زاویه‌ای کوچکی در جسم پدید آید، گشتاور حاصل از کوپل نیروی وزن و نیروی شناوری، باگرداندن جسم در جهت عکس دوران ایجاد شده، آن را به حالت اولیه باز میگرداند.

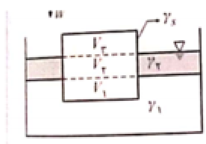


۲- تعادل ناپایدار: اگر مرکز ثقل جسم غوطه‌ور بالای مرکز شناوری باشد.
در این حالت اگر تغییر شکل زاویه‌ای کوچکی در جسم پدید آید، گشتاور حاصل از کوپل نیروی وزن و نیروی شناوری، باگرداندن جسم در جهت دوران ایجاد شده، به ادامه دوران کمک خواهد کرد.



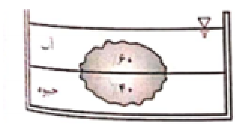
۲- تعادل خنثی: اگر مرکز ثقل جسم غوطه‌ور منطبق بر مرکز شناوری باشد.
در این حالت اگر تغییر شکل زاویه‌ای کوچکی در جسم پدید آید، به همان حالت باقی خواهد ماند و تمایلی به ادامه دوران یا بازگشت به حالت اولیه ندارد.

نکته: اگر جسمی درون دو سیال غیرمحلول قرار گیرد نیروی شناوری مانند زیر محاسبه می‌شود:



$$FB = \gamma 1\, V1 + \gamma 2\, V2$$

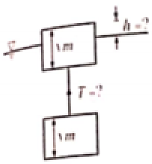
مثال ۱۴: ۴۰ درصد حجم یک قطعه فلزی در داخل جیوه و مابقی آن درون آب مستغرق است. وزن مخصوص این قطعه فلزی را به دست آورید. (SHg = 13.5)



با توجه به اینکه وزن مخصوص جیوه بیشتر از وزن مخصوص آب هست، بنابراین نحوه قرارگیری قطعه فلزی به شکل روبرو است.

$$W = FB = \gamma 1\, V1 + \gamma 2\, V2 \longrightarrow \gamma s\, V = 10 \times 0.6\, V + 13.5 \times 10 \times 0.4V \longrightarrow \gamma s = 0.6\ KN/m^3$$

مثال۱۵ : در مکعب با حجم یکسان۱ m3 ، یکی با چگالی ۰.۸ و دیگری با چگالی ۱.۱ با سیم کوتاهی به هم متصل اند و در آب قرار داده شده اند. مطلوب است، تعیین ارتفاعی از مکعب سبک‌تر که بالای سطح آب قرار گرفته است. در این حالت نیروی کشش سیم چقدر است؟



اگر فرض کنیم مکعب ها مانند شکل مقابل باشند:

$$\sum Fy = 0 \longrightarrow W = FB$$

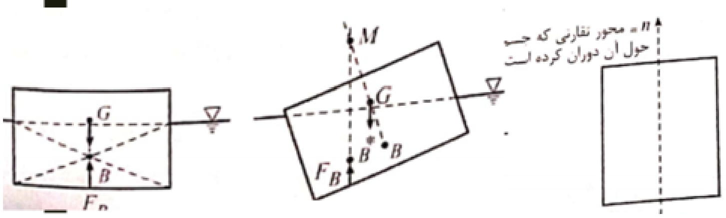
$$1.1 \times \gamma w \ \times 1 + 0.8 \times \gamma w \times 1 \ = 1 \times \gamma w + \gamma w \ \times (1 - h) \longrightarrow h = 0.1\, m = 10\, cm$$

با رسم دیاگرام آزاد مکعب پایینی و نوشتن معادله تعادل در راستای قائم داریم:

$$\sum Fy = 0 \longrightarrow T = W - FB = 1.1 \times 10 \times 1 - 10 \times 1 = 1\, KN$$

پایداری اجسام شناور

هنگام تغییر موقعیت و دوران جسم شناور، مرکز شناوری آن‌ها نیز تغییر می‌کند.

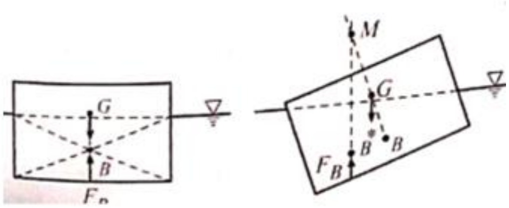


الف- نمای افقی از جسم شناور
ب- حالت دوران یافته جسم شناور
ج- نمای بالایی جسم شناور

مرکز شناوری: نقطه اثر نیروی شناوری که مرکز حجم قسمتی از جسم شناور است که در مایع فرورفته است در شکل الف: نقطه B و در شکل ب نقطه *B مرکز شناوری است.

متاسنتر: اگر G نشانگر مرکز ثقل جسم شناور و B مرکز شناوری آن در حالت افقی باشد، محل برخورد امتداد GB با امتداد نیروی شناوری در حالت دوران یافته، نقطه استقرار یا متاسنتر می‌نامند. در شکل ب نقطه M متاسنتر می‌باشد

ارتفاع متاسنتریک: فاصله متاسنتر تا مرکز ثقل



$$\boxed{\overline{MG} = \overline{MB} - \overline{GB}}$$

$\overline{GB}$: فاصله بین مرکز ثقل و مرکز شناوری در حالت افقی

$$\boxed{\overline{MB} = \frac{\gamma In}{W} = \frac{In}{Vd}}$$

In :گشتاور اینرسی نسبت به محوری که جسم شناور حول آن دوران می‌کند.

γ : وزن مخصوص سیال

W : وزن جسم

Vd :حجم مایع جابجا شده

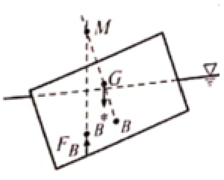
بررسی پایداری:

ارتفاع متاسنتریک یک عامل مهم در تعیین پایداری اجسام شناور است. در این حالت ارتفاع متاسنتریک حول یک محور ضعیف مورد نظر خواهد بود.

پس از برداشتن عامل دوران، یک کوپل برگرداننده از نیروی وزن و شناوری جسم را به حالت اولیه برمی‌گرداند $\Leftarrow$ $\overline{MG} > 0$

پس از برداشتن عامل دوران، یک کوپل واژگون کننده از نیروی وزن و شناوری باعث دوران بیشتر و واژگونی خواهد شد. $\Leftarrow$ $\overline{MG} < 0$

هیچ گونه کوپلی نداریم. $\Leftarrow$ $\overline{MG} = 0$



کوپل بازگرداننده

$$\boxed{\mathrm{M} = \mathrm{W} \times \overline{MG} \times Sin\theta}$$

از آنجایی که $Sin\theta$ خیلی کوچک هست می‌توان برابر θ نیز گرفت

مثال ۱۶: جسم شناوری به طول ۴ متر، عرض ۳ متر و ارتفاع ۱.۲ متر مفروض است. اگر عمق استغراق این جسم در آب دریا ۰.۸ متر و مرکز ثقل آن ۰.۶ متر بالاتر از کف جسم باشد. ارتفاع متاسنتریک آن را در شرایط دوران حول محورهای قوی و ضعیف حساب کنید.

$$\overline{MB} = \frac{\gamma In}{W} = \frac{In}{Vd}$$

$$\boxed{\overline{MG} = \overline{MB} - \overline{GB}}$$

MB = 0.6

MG = $\frac{0.8}{2}$ = 0.4

با رسم شکل داریم:

$$In = \frac{1}{12} \times 4 \times 3^3 = 9\ m^4$$

$$Im = \frac{1}{12} \times 3 \times 4^3 = 16\ m^4$$

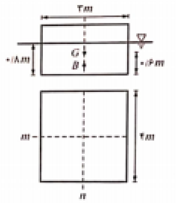
$$Vd = 0.8 \times 3 \times 4 = 9.6\ M^3$$

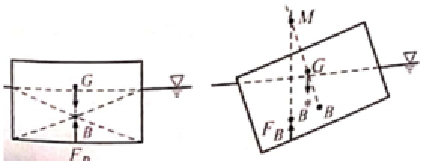
$$\overline{GB} = 0.6 - 0.4 = 0.2\ m$$

$$\overline{MG}n = \frac{In}{Vd} = \frac{9}{9.6} - 0.2 = 0.74\ m$$

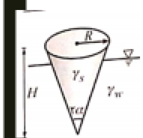
$$\overline{MG}m = \frac{16}{9.6} - 0.2 = 1.47\ m$$

ارتفاع متاسنتریک برای محور قوی تر بیشتر از محور ضعیف تر است.





مثال ۱۷: مخروط توپری به وزن مخصوص γs مطابق شکل در آب به وزن مخصوص γs شناور است. حداقل زاویه α را به نحوی تعیین کنید که پایداری مخروط شناور تامین شود. مخروط همگن است و مرکز جرم آن به فاصله H ۰.۷۵ از راس قرار دارد.



ارتفاعی از مخروط را که داخل آب است را h می نامیم. در این حالت شعاع مقطعی از مخروط که در برابر سطح آزاد آب قرار دارد، برابر r می باشد. رابطه تعادل را می نویسیم:

$$\sum Fy = 0 \qquad W = FB$$

$$W = \gamma s\, V = \gamma s \left(\frac{1}{3}\pi r^2 H\right) \quad , \quad R = Htan\alpha \quad W = \frac{\pi}{3}\gamma s H^3 tan\alpha$$

$$FB = \gamma s\, Vd = \gamma s \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right) \quad , \quad r = htan\alpha \quad FB = \frac{\pi}{3}\gamma s h^3 tan\alpha$$

$$\frac{h}{H} = \left(\frac{\gamma s}{\gamma w}\right)^3 = (S)^{\frac{1}{3}}$$

شرط تعادل پایدار، یعنی مثبت بون ارتفاع متاسنتریک:

$$\overline{MG} > 0 \qquad \overline{MB} - \overline{GB} > 0 \qquad \frac{In}{Vd} > \overline{GB}$$

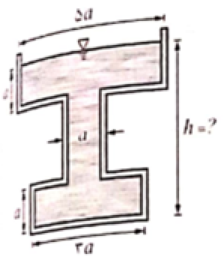
$$\begin{cases} In = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi}{4}\, h^4 tan^4\alpha \\ Vd = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} h^3 tan^2\alpha \\ \overline{GB} = \frac{3}{4}H - \frac{3}{4}h = \frac{3}{4}\left[\frac{h}{S^{\frac{1}{3}}}\right] - \frac{3}{4}h = \frac{3}{4}h\left[\frac{1-S^{\frac{1}{3}}}{S^{\frac{1}{3}}}\right] \end{cases}$$

$$\frac{\frac{\pi}{4}h^4 tan^4\alpha}{\frac{\pi}{3}h^3 tan^2\alpha} > \frac{3}{4}h\left[\frac{1-S^{\frac{1}{3}}}{S^{\frac{1}{3}}}\right] \Longrightarrow tan\alpha > \left[\frac{1-S^{\frac{1}{3}}}{S^{\frac{1}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین حداقل زاویه برای تامین پایداری مخروط برابر است با:

$$\alpha = Arctan\left[\frac{1-S^{\frac{1}{3}}}{S^{\frac{1}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

تمرین ۱: در ظرف متقارن نشان داده شده در شکل روبرو، مقدار h چقدر باشد تا نیروی هیدرواستاتیک وارد بر کف ظرف با وزن مایع داخل آن برابر شود؟ (عرض ظرف ۱ متر است.)

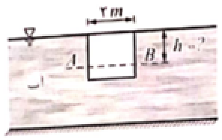


$$\begin{rcases} F = P.A \\ P = \gamma h \end{rcases} \longrightarrow F = \gamma h A \quad W = \gamma V$$

با بررسی قرار دارن نیروی هیدرواستاتیک وارد برکف (F) و وزن مایع داخل آن (W) خواهیم داشت:

$$F = W \longrightarrow \gamma \times h \times 3a = \gamma[a \times 5a + (h-2a) \times a + a \times 3a] \longrightarrow h = 3a$$

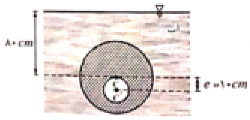
تمرین ۲: یک صفحه مربعی شکل به ضلع ۲ متر، به طور قائم درون آب قرار دارد. مطابق شکل، خط افقی AB که به فاصله h از سطح آزاد آب قرار دارد، این صفحه را به دو جز تقسیم می‌کند. مقدار h چقدر باشد تا نیروی اعمال شده بر دو جز بالایی و پایینی با یکدیگر برابر شوند؟



$$F_{up} = F_{down} \longrightarrow \gamma\left[\frac{h}{2}\right] \times [2 \times h] = \gamma\left[h + \left(\frac{2-h}{2}\right)\right][2 \times (2-h)]$$

$$\gamma h^2 = \gamma\left(4 - h^2\right) \longrightarrow h = \sqrt{2}\ m$$

تمرین ۳: یک صفحه دایروی به قطر 50cm مطابق شکل در آب غوطه ور است.چنددرصداز کل نیروی هیدرواستاتیکی وارد بر صفحه، به قسمت هاشور خورده آن وارد می‌شود؟ $(\pi = 3)$



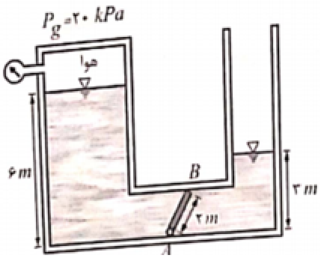
$$F = \gamma h A = 10(0.8)\left(\pi \times \frac{0.5^2}{4}\right) = 1.5\ KN$$

$$F_{\text{هاشورخورده}} = F_{\text{کل}} - F_{\text{هاشورنخورده}}$$

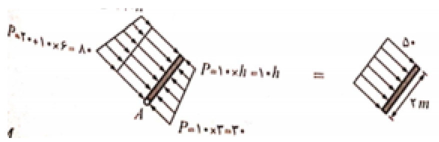
$$F_{\text{هاشورنخورده}} = \left(\gamma \bar{h} A\right)_{\text{هاشورنخورده}} = 10(0.8 + 0.1)\left(\frac{\pi \times 0.2^2}{4}\right) = 0.27\ KN$$

$$F_{\text{هاشورخورده}} = 1.5 - 0.27 = 1.23\ kN \qquad \frac{F_{\text{هاشورخورده}}}{F_{\text{کل}}} = \frac{1.23}{1.5} = 0.82 \ \text{یا}\ 83\%$$

تمرین۴ : در شکل مقابل، دریچه AB (به ابعاد $1m\times2m$) در نقطه A لولا شده است. دو طرف دریچه از آب پر شده است و یک طرف در معرض هوای فشرده با فشار۲۰ kpa و طرف دیگردرمعرض فشاراتمسفرقرارمی گیرد. گشتاور وارده ازطرف آب به دریچه، حول لولای A ، چند است؟ ($\gamma=10$ kN/m3)

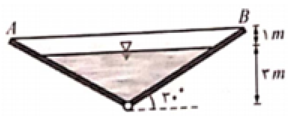


$$P = 20 + 10 \times (6-3) + 10h = 50 + 10h$$



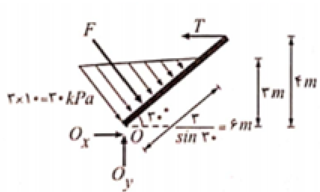
$$\sum M_A = (50 \times 2 \times 1) = 100\ KN.m$$

تمرین ۵: مخزن Vشکل زیر، تا ارتفاع ۳ متر از آب پر شده است و دیواره‌های آن توسط کابل AB نگه‌داشته می‌شوند. نیروی کشش کابل را با صرف‌نظر کردن از وزن دیواره‌ها محاسبه کنید. (عرض مخزن ۱ متر و $\gamma=10$ است.)

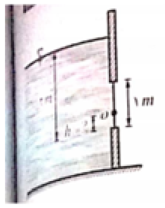


با ترسیم دیاگرام آزاد نیمی از مخزن نوشتن رابطه تعادل لنگرها حول لولای O به دست می‌آید:

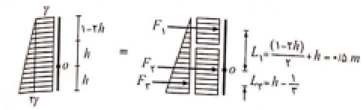
$$\sum Mo = 0 \longrightarrow (T)(4) = (F)\left(\frac{6}{3}\right) = 90(2) \longrightarrow T = 45KN$$



تمرین۶ : در شکل مقابل طوری h را پیدا کنید که در حالت نشان داده شده، دریچه مستطیلی در آستانه باز شدن قرار گیرد.

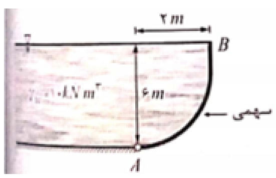


برای اینکه دریچه در آستانه باز شدن قرار گیرد، بایستی برآیند لنگر نیروهای وارد بر آن حول محور دوران (O)، صفر شود. در این حالت با در نظر گرفتن عرض واحد برای دریچه، خواهیم داشت:

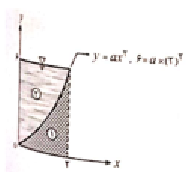


$$\sum Mo = 0 \longrightarrow F_1 \times L_1 = F_2 \times L_2 \longrightarrow \gamma(1-2h) \times 0.5 = (\frac{1}{2}\gamma \times 1^2)(h - \frac{1}{3}) \longrightarrow h = \frac{4}{9}\ m$$

تمرین۷: در شکل مقابل، نیروی قائم هیدرواستاتیک که بر دریچه سهمی شکل وارد می‌شود، چقدر است؟ دریچه در نقطه A لولا شده است و عرض آن برابر ۵ متر می‌باشد.



$$y = ax^2 \quad , \quad 6 = a \times 2^2 \longrightarrow a = \frac{3}{2} \longrightarrow y = \frac{3}{2}x^2$$

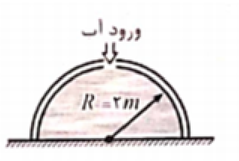


$$\begin{cases} F_V = \gamma V_2 = \gamma L S_2 \\ L = 5\ m \quad , \quad \gamma = 10\frac{KN}{m^3} \\ S_2 = 6 \times 2 - S_1 = 12 - \int_0^2 \frac{3}{2}x^2\ dx = 8\ m^2 \end{cases}$$

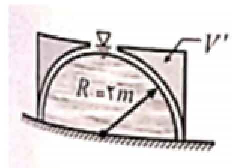
$$F_V = 10 \times 5 \times 8 = 400\ KN$$

مساحت S_1 را می‌توان از رابطه $S_1 = \frac{bh}{3} = \frac{2\times\times 6}{3} = 4\ m^2$ نیز محاسبه کرد.

تمرین۸ :ظرفی به شکل نیم‌کره مطابق شکل روی سطح سیقلی قرار می‌گیرد و از طریق روزنه بالای طرف، با آب پر می‌شود. وزن مخصوص مصالح ظرف حداقل چند kN/m3 باشد تا هیچ آبی از زیر آن خارج نشود؟ ($t_{\text{ظرف ضخامت}} = 100\ mm$ و $\pi = 3$)



اگر نیروی قائم وارد از طرف سیال به نیم‌کره از وزن نیم‌کره بیشتر شود، آن را بلند می‌کند و آب از زیر نیم‌کره روی سطح جاری خواهد شد بنابراین داریم:



$$W_{\text{وزن نیم‌کره}} > F_{V(\text{نیروی هیدرواستاتیک})}$$

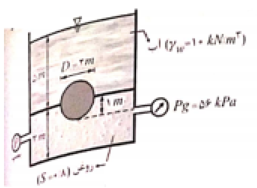
$$W = \gamma_S V \quad , \qquad V = At = \frac{1}{2}(4\pi R^2)(t) = 2\pi \times 2^2 \times 100 \times 10^{-3} = 2.4\ m^3$$

$$F_V = \gamma \acute{V} \quad , \qquad \acute{V} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{نیم‌کره}} = \pi R^2 \times R - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{\pi R^3}{3} = \frac{\pi \times 2^3}{3} = 8$$

$$F_V = 10 \times 8 = 80\ KN$$

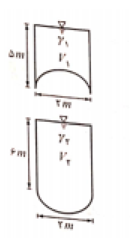
$$W = \gamma_S \times 2.4 \geq 80 \qquad \gamma_{S(min)} = 33.33\ kN/m^3$$

تمرین۹ :اگر و قسمت مخزن کاملا نسبت به هم آب‌بندی شده یاشند، نیروی قائم وارد بر کره چقدر است؟



۱- محاسبه فشار در بالا و پایین سطح آب‌بندی شده:

$$\frac{P_i}{\gamma_o} = \frac{P_g}{\gamma_o} - 1 = \frac{56}{8} - 1 = 6m$$



۲- محاسبه نیروی وارد بر نیم‌کره بالایی:

$$F_{V(1)} = \gamma_1 V_1 = 10 \times \left(\pi \times 1^2 \times 5 - \frac{2}{3}\pi \times 1^2\right) = \left(50 - \frac{20}{3}\right)\pi = \frac{130\pi}{3} \downarrow$$

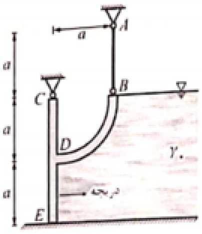
۳- محاسبه نیروی وارد بر نیم‌کره پایینی

$$F_{V(2)} = \gamma_2 V_2 = 8\left(\pi \times 1^2 \times 6 + \frac{2}{3}\pi \times 1^3\right) = \left(48 + \frac{16}{3}\right)\pi = \frac{160\pi}{3} \uparrow$$

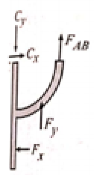
۴- محاسبه نیروی وارد بر کره:

$$F_V = F_{V(2)} - F_{V(1)} = \frac{160\pi}{3} - \frac{130\pi}{3} = 10\pi \uparrow$$

تمرین۱۰ : جهت تعادل دریچه شکل مقابل، از کابل استفاده می‌شود. با صرف نظر کردن ازوزن دریچه، نیروی کابل چقدر است؟ (عرض عمود بر صفحه واحد است.)



$$\begin{cases} \sqrt{Mc} = 0 \longrightarrow F_{AB} \times a + F_y \times \frac{4a}{3\pi} = F_X \times \frac{2}{3}(2a) \\ F_V = \gamma V = \gamma_o \times \frac{1}{4}\pi a^2 \times 1 = \frac{\pi}{4}\gamma_o a^2 \\ F_X = \gamma \bar{h} A = \gamma_o \times a \times (2a \times 1) = 2\gamma_o a^2 \end{cases}$$



$$F_{AB} \times a + \frac{\pi}{4}\gamma_o a^2 \times \frac{4a}{3\pi} = 2\gamma_o a^2 \times \frac{4}{3}\pi \longrightarrow F_{AB} = \frac{7\gamma_o a^2}{3}$$

تمرین۱۱ : یک قطعه فلزی به دانسیته در داخل یک مخزن آب به عمق ۳.۷۵ متر رها می‌گردد. با صرف‌نظر از نیروی مقاومت آب در برابر حرکت جسم، مدت زمانی را که طول می‌کشد تا این قطعه به کف ظرف برسد، محاسبه کنید. (g = 10 m/s2)

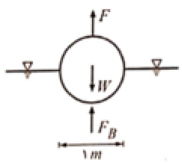
$$\sum Mo = ma \longrightarrow w - F_B = ma \longrightarrow a = \frac{W - F_B}{m} = \frac{\gamma_S V - \gamma_W V}{\rho_S V} = g\left(1 - \frac{1}{S}\right) = 10\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 7.5\ m/s^2$$

$$y = \frac{1}{2}at^2 \longrightarrow 3.75 = \frac{1}{2} \times 7.5 \times t^2 \longrightarrow t = 1$$ ثانیه

$$\rho_W = 1\frac{gr}{cm^3} \quad , \rho_S = 4\frac{gr}{cm^3} \longrightarrow S = \frac{\rho_S}{\rho_W} = \frac{4}{1} = 4$$

تمرین۱۲: یک توپ کروی به قطر ۱ متر ابتدا در داخل آب کاملا غوطه‌ور است. چه نیرویی باید در راستای قائم به این توپ وارد شود تا نیمی از آن از آب خارج شود؟ ($\pi=3$, $\gamma w=10$)

از آنجایی که در حالت اول توپ کروی کاملا در آب غوطه ور است، می‌توان نتیجه گرفت وزن مخصوص توپ با وزن مخصوص آب برابر است. حال در حالت دوم که نیمی از توپ از آب خارج شده است، معادله تعادل نیروها را باتوجه به شکل مقابل نوشته و خواهیم داشت:



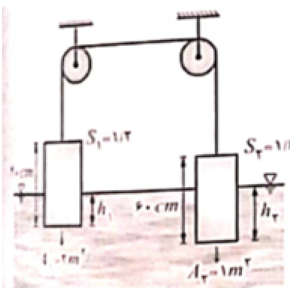
$$\sum Fy = 0 \qquad F + F_B = W$$

$$\begin{cases} F_B = \gamma_W V_d = \frac{1}{2}\gamma_S V = \frac{1}{2}W \\ \gamma_W = \gamma_S \quad , \quad V_d = \frac{V}{2} \end{cases}$$

$$F + \frac{1}{2}W = W \longrightarrow F = \frac{W}{2}$$

$$W = \gamma_S V = \gamma_W\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 10\left(\frac{4}{3}\times 3\times 0.5^3\right) = 5\ kN \longrightarrow F = \frac{5}{2} = 2.5\ KN$$

تمرین۱۳ : دو قطعه (۱) و (۲) مطابق شکل توسط سیستم کابل و قرقره در سطح آب در حالت شناور قرار دارند. پس از تعادل کل مجموعه، نسبت $\frac{h_1}{h_2}$ چقدر است؟



فرض می‌کنیم نیروی T در کابل ایجاد می‌شود. دیاگرام آزاد دو قطع را در نظر می‌گیریم :

$$\sum Fy = 0 \longrightarrow T + F_{B1} = W_1 \longrightarrow T = W_1 - F_{B1}$$

$$\sum Fy = 0 \longrightarrow T + F_{B2} = W_2 \longrightarrow T = W_2 - F_{B2}$$

$$W_1 - F_{B1} = W_2 - F_{B2} \longrightarrow W_2 - W_1 = F_{B2} - F_{B1}$$

$$S_2\gamma_W \times V_2 - S_1\gamma_W \times V_1 = \gamma_W \times V_{d2} - \gamma_W \times V_{d1}$$

$$(1.6\times 10)(10.6) - (1.2\times 10)(2\times 0.4) = 10(1\times h) - 10(2\times h) \longrightarrow h_2 = 2h_1 \longrightarrow \frac{h_1}{h_1} = \frac{1}{2}$$